EML 2023 – Mathématiques appliquées

Corrigé

Exercice 1

1. (a) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Or, $x + 1 > 0$ (car $x > 0$), $e^{-x} > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
Calculons ses limites. On a directement (pas de forme indéterminée) : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ ($e^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$) et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ($e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$). D'où le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

(b) On montre par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».
C'est évident pour $n = 0$ (car $u_0 = 1$ d'après l'énoncé).
Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$:
Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$. En particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de f, donc $f(u_n)$ est bien défini, i.e u_{n+1} est bien défini.
De plus, d'après les variations de fonction f étudiées à la question précédente, on a $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Donc en particulier $f(u_n) > 0$, i.e $u_{n+1} > 0$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2. (a) On calcule les termes successifs de la suite jusqu'à avoir $u_n > a$, c'est-à-dire tant que $u_n \leqslant a$. D'où le programme :

```python
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u<=a:
        u=exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

(b) La commande `fonc_2(a)` renvoie le plus petit n tel que $u_n \leqslant a$.

> Par conséquent, les termes $u_0, \dots, u_4$ sont tous compris dans l'intervalle $]10^{-6}; 10^6]$. Par contre, $u_5 \leqslant 10^{-6}$ et $u_6 > 10^6$. Il semblerait que la suite (u_n) alterne des très grand termes avec des très petits termes.

(c) Il suffit d'itérer n fois la fonction f, sur le modèle des fonctions `fonc_1` et `fonc_2`, mais avec une boucle `for` au lieu d'une boucle `while`. D'où le programme :

```python
def suite(n):
    from numpy import exp
    u=1
    for k in range(n):
        u=exp(-u)/u
    return u
```

3. (a) La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables et pour tout $x \geqslant 0$, on a $g'(x) = -e^{-x} - 2x = -(e^{-x} + 2x)$. Or, $e^{-x} > 0$ et $2x \geqslant 0$, donc $g'(x) < 0$. Par conséquent, g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, g est continue sur cet intervalle (puisqu'elle y est dérivable). Donc, par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $g([0; +\infty[) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} g(x); g(0) \right]$. Or, on a directement $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 1$.

> Conclusion : la fonction g réalise une bijection (strictement décroissante) de $[0; +\infty[$ sur $] - \infty; 1]$.

(b) Pour tout $x > 0$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\iff e^{-x} = x^2 \\ &\iff e^{-x} - x^2 = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $] - \infty; 1]$, et 0 appartient à l'intervalle image $] - \infty; 1]$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$. De plus, $\alpha \neq 0$ car $g(0) \neq 0$.

> Donc, d'après les équivalences ci-dessus, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

(c) On a $g(1) = e^{-1} - 1$. Or, $e > 2$, donc $e^{-1} < \dfrac{1}{2}$, donc en particulier $e^{-1} < 1$. Par conséquent, $g(1) < 0$, c'est-à-dire $g(1) < g(\alpha)$. Par décroissance de g sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $\alpha < 1$.
De même, $g\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(\frac{-1}{e}\right) - \exp(-2)$. Or, comme vu ci-dessus, $\frac{1}{e} < 1$, et donc en particulier, $\frac{1}{e} < 2$. D'où $\frac{-1}{e} > -2$, et donc (par stricte croissance de la fonction exponentielle) : $\exp\left(\frac{-1}{e}\right) > \exp(-2)$. On en déduit que $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, c'est-à-dire $g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha)$. Et donc, par décroissance de g sur $[0; +\infty[$, on a finalement $\alpha > \frac{1}{e}$.

$\boxed{\text{Conclusion : on a } \dfrac{1}{e} < \alpha < 1.}$

4. (a) On a $u_1 = f(u_0) = e^{-1}$. Comme $e > 2$, on en déduit que $u_1 < \dfrac{1}{2}$. Par conséquent, par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on a $f(u_1) > f\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $u_2 > 2e^{-1/2}$.
Or, $e < 4$, donc $e^{1/2} < 2$, donc $e^{-1/2} > \dfrac{1}{2}$ et donc $2e^{-1/2} > 1$.

$\boxed{\text{Conclusion : on a } u_2 > 1, \text{ c'est-à-dire } u_2 > u_0.}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{2n}$, et montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} > v_n$.
D'après la question précédente, on a $u_2 > u_0$, soit $v_1 > v_0$. Ainsi, la récurrence est initialisée.
Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose que $v_{n+1} > v_n$ et on montre que $v_{n+2} > v_{n+1}$:
Par hypothèse de récurrence, $v_{n+1} > v_n$, soit $u_{2n+2} > u_{2n}$. Par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$. De même, par stricte décroissance de f, on en déduit alors que $f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1})$, soit $u_{2n+4} < u_{2n+2}$, ou encore : $v_{n+2} > v_{n+1}$, ce qui termine la récurrence.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} > v_n$. Ainsi, la suite (v_n), c'est-à-dire la suite (u_{2n}), est strictement croissante.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = u_{2n+1}$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+2} > u_{2n}$. Par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, ou encore : $w_{n+1} < w_n$. Ainsi, la suite (w_n), c'est-à-dire la suite (u_{2n+1}), est strictement décroissante.
Comme par ailleurs, elle est minorée par 0 ($u_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après la question 1.(b)), on en déduit, par le théorème de la limite monotone que $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1}) \text{ est convergente}}$.

5. (a) Pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, donc la composée $h(x) = f(f(x))$ a bien un sens. De plus,

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(f(x)) \\
&= \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} \\
&= \frac{x\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{e^{-x}}
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $\boxed{h(x) = xe^x \exp\left(\dfrac{-e^{-x}}{x}\right)}$.

(b) D'après la question 1.(a), la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $]0;+\infty[$. Par conséquent, $f \circ f$ est continue sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions continues. Autrement dit, h est continue sur $]0;+\infty[$. Examinons maintenant la continuité de h (à droite) en 0. D'après la question précédente, on a, pour tout $x > 0$, $h(x) = xe^x \exp(-f(x))$. Or, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $-f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\exp(-f(x)) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. De plus, $xe^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit, $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} h(0)$, ce qui établit la continuité de h (à droite) en 0.

Conclusion : la fonction h est continue sur $[0;+\infty[$.

(c) On sait déjà que 0 est solution de $h(x) = x$ puisque $h(0) = 0$ par définition de $h(0)$. Cherchons maintenant les solutions strictement positives. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
h(x) = x &\iff xe^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = x \quad \text{(question 5.(a))} \\
&\iff e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = 1 \quad \text{car } x \neq 0 \\
&\iff \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = e^{-x} \\
&\iff \frac{-e^{-x}}{x} = -x \quad \text{par injectivité de la fonction } \exp \\
&\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\
&\iff f(x) = x \\
&\iff x = \alpha \quad \text{(question 3.(b))}
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a une unique solution strictement positive, qui est α.

Conclusion : l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$, qui sont 0 et α.

(d) Reprenons les notations de la question 4.(c) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(w_n)$. Notons ℓ la limite de (w_n) (qui existe d'après la question 4.(c)), et passons à la limite dans l'égalité $w_{n+1} = h(w_n)$. On obtient alors, par continuité de h sur $[0; +\infty[$ (cf question 5.(b)) : $\ell = h(\ell)$. Par conséquent, d'après la question précédente, $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.
Montrons que $\ell \neq \alpha$. Le premier terme de la suite (w_n) est $w_0 = u_1 = f(u_0) = f(1)$. Or, comme $\alpha < 1$ (cf question 3.(c)), on a, par stricte décroissance de f : $f(\alpha) > f(1)$, soit $\alpha > w_0$. Ainsi, la suite (w_n) est strictement décroissante (cf question 4.(c)), et de premier terme strictement inférieur à α. Elle ne peut pas converger vers α. Par conséquent, ℓ est nécessairement égal à 0.
$\boxed{\text{Conclusion : la suite } (u_{2n+1}) \text{ converge vers } 0.}$

6. La suite (u_{2n}) est croissante (cf question 4.(b)). Donc, par le théorème de la limite monotone : soit elle est majorée, et dans ce cas elle converge, soit elle ne l'est pas, et dans ce cas diverge vers $+\infty$.
Par l'absurde, supposons qu'on soit dans le premier cas (suite majorée et convergente). Notons ℓ' sa limite. De même qu'à la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n})$. D'où, en passant à la limite : $\ell' = h(\ell')$, et donc (cf question 5.(c)) $\ell' = 0$ ou $\ell' = \alpha$.
Or, (u_{2n}) est croissante, de premier terme u_0, qui est strictement supérieur, à la fois à 0 et à α. Elle ne peut donc pas converger, ni vers 0, ni vers α, ce qui contredit ce qui précède. On n'est donc pas dans le cas où (u_{2n}) est majorée et convergente.
$\boxed{\text{Conclusion : la suite } (u_{2n}) \text{ n'est pas majorée, et } \lim_{n \to +\infty} u_{2n} = +\infty.}$

Remarque : les résultats des 2 questions précédentes confirment le commentaire effectué à la question 2.(b).

Exercice 2

Partie I - Réduction de la matrice A

1. (a) On a $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En soustrayant la première ligne aux deux autres, on obtient alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est une matrice échelonnée avec une seule ligne non nulle. Par conséquent, $\boxed{\mathrm{rg}(A - 2I) = 1}$.

(b) La matrice $A - 2I$ appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, mais n'est pas de rang 3. Par conséquent, elle n'est pas inversible, et donc $\boxed{2 \text{ est valeur propre de } A}$.
De plus, par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I)) + \mathrm{rg}(A-2I) = 3$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I)) = 2$ d'après la question précédente.

$\boxed{\text{Conclusion : l'espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 2 est de dimension 2.}}$

(c) On résout $AX = 2X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff (A - 2I)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases} \\ &\iff x + y + z = 0 \\ &\iff z = -x - y \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ z = -x - y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= Vect(X_1, X_2) \quad \text{avec } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La famille (X_1, X_2) est une famille génératrice de E_2. De plus, elle est constituée de 2 vecteurs et $\dim(E_2) = 2$ (cf question précédente). C'est donc une base de E_2.

$\boxed{\text{Conclusion : la famille } (X_1, X_2) \text{, où } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{, est une base de } E_2.}$

Remarque : il n'y avait pas unicité de la base. Si, à partir de l'équation $x + y + z = 0$*, on avait exprimé* x *en fonction de* y *et* z *(ou* y *en fonction de* x *et* z*), on en aurait trouvé une autre.*

(d) La somme des dimensions des espaces propres d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est au maximum 3. Étant donné que E_2 est déjà de dimension 2, on en déduit que $\boxed{A \text{ admet au plus une valeur propre différente de 2}}$.

2. (a) $\boxed{\text{Par définition du produit matriciel, pour tout } i \in \{1, 2, 3\} \text{, le } i\text{-ème coefficient de } MU \text{ est égal à la somme des coefficients sur la } i\text{-ème ligne de } M.}$

(b) La somme des coefficients sur chaque ligne de A est égale à 5. Ainsi, $AU = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$.

$\boxed{\text{On en déduit que 5 est valeur propre de } A \text{ et que } U \text{ en est un vecteur propre associé.}}$

De plus, comme A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la somme des dimensions de ses espaces propres est au maximum 3. Et comme $\dim(E_2) = 2$, on en déduit que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 5 est nécessairement 1.

Ainsi, (U) est une famille libre (elle est constituée d'un seul vecteur non nul) à un élément, dans un espace de dimension 1. C'est donc une base de cet espace.

$\boxed{\text{Conclusion : la famille } (U) \text{ est une base de l'espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 5.}}$

3. La matrice A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à 3. Elle est donc diagonalisable. De plus, d'après les valeurs propres et les bases des espaces propres trouvées précédemment (cf questions 1.(b), 1.(c) et 2.(b)), on en déduit que $\boxed{A = PDP^{-1}}$, avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$.

Partie II - Un système différentiel

4. Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, ainsi que $Y(t) = P^{-1}X(t)$, qu'on notera $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.

   Alors :

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (S) &\iff X' = AX \\
&\iff X' = PDP^{-1}X \\
&\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\
&\iff Y' = DY \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a' &=& 2a \\ b' &=& 2b \\ c' &=& 5c \end{array} \right. \\
&\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que, pour tout } t \in \mathbb{R}, \\
&\qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a(t) &=& \alpha e^{2t} \\ b(t) &=& \beta e^{2t} \\ c(t) &=& \gamma e^{5t} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\iff \text{Il existe } (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que, pour tout } t\in\mathbb{R},$$
$$Y(t)=\begin{pmatrix}\alpha e^{2t}\\ \beta e^{2t}\\ \gamma e^{5t}\end{pmatrix}$$
$$\iff \text{Il existe } (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que, pour tout } t\in\mathbb{R},$$
$$X(t)=P\begin{pmatrix}\alpha e^{2t}\\ \beta e^{2t}\\ \gamma e^{5t}\end{pmatrix}$$

Conclusion : le triplet de fonctions (x,y,z) est solution de (S) si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \alpha e^{2t}+\gamma e^{5t}\\ y(t) & = & \beta e^{2t}+\gamma e^{5t}\\ z(t) & = & -\alpha e^{2t}-\beta e^{2t}+\gamma e^{5t}\end{array}\right.$$

5. (a) C'est $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de la solution à un problème de Cauchy}}$ qui nous permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t\mapsto \begin{pmatrix}x_0(t)\\ y_0(t)\\ z_0(t)\end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

(b) D'après la question 4, il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0(t) & = & \alpha e^{2t}+\gamma e^{5t}\\ y_0(t) & = & \beta e^{2t}+\gamma e^{5t}\\ z_0(t) & = & -\alpha e^{2t}-\beta e^{2t}+\gamma e^{5t}\end{array}\right.$$

En particulier, pour $t=0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha+\gamma\\ -1 & = & \beta+\gamma\\ 0 & = & -\alpha-\beta+\gamma\end{array}\right.$$

On résout ce système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & 1\\ & & \beta & + & \gamma & = & -1\\ -\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3+L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & 1\\ & & \beta & + & \gamma & = & -1\\ & - & \beta & + & 2\gamma & = & 1\end{array}\right.$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & 1\\ & & \beta & + & \gamma & = & -1\\ & & & & 3\gamma & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} \alpha & = & 1\\ \beta & = & -1\\ \gamma & = & 0\end{array}\right.$$

Ainsi, en remplaçant dans l'expression générale de la solution, on a :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_0(t) & = & e^{2t} \\ y_0(t) & = & -e^{2t} \\ z_0(t) & = & 0 \end{array} \right.}$$

Partie III - Un second système différentiel

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } B &\iff B - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff (-1-\lambda)(3-\lambda) - 1 \times (-4) = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\iff (\lambda - 1)^2 = 0 \\ &\iff \lambda - 1 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : la matrice } B \text{ admet une unique valeur propre qui est 1.}}$

7. Montrons par l'absurde que B n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, il existerait une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telle que $B = PDP^{-1}$. De plus, d'après le spectre de B, on devrait alors avoir $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit $D = I_2$. Ainsi, on aurait $B = PI_2P^{-1}$, soit $B = PP^{-1} = I_2$, ce qui est absurde.
$\boxed{\text{Conclusion : la matrice } B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

8. (a) Montrons que la famille (v_1, v_2) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda v_1 + \mu v_2 = (0,0) &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ -\lambda & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mu & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (v_1, v_2) est libre. Comme de plus, c'est une famille constituée de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et que $\dim(R^2) = 2$, on en déduit que $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

(b) On calcule $f(v_1)$ et $f(v_2)$ en se servant de la matrice B :
- $B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où $f(v_1) = v_1$.
- $B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où $f(v_2) = (1, -1) = v_1 + v_2$.

Par conséquent, la matrice de f dans la base β est $\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Remarque : si on ne voyait pas directement que $(1, -1) = v_1 + v_2$*, on pouvait chercher* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $(1, -1) = \lambda v_1 + \mu v_2$ *par une résolution de système.*

(c) La matrice B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la matrice T est la matrice de f dans la base β. Par les formules de changement de bases, on en déduit que $B = QTQ^{-1}$, avec Q la matrice de passage de la base canonique à la base β, c'est-à-dire $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

9. On procède (au début) comme à la question 4. Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, ainsi que $Y(t) = Q^{-1}X(t)$, qu'on notera $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\Sigma) &\iff X' = BX \\
&\iff X' = QTQ^{-1}X \\
&\iff Q^{-1}X' = TQ^{-1}X \\
&\iff Y' = TY \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a' & = & a + b \\ b' & = & b \end{array} \right. \\
&\iff \text{Il existe } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que, pour tout } t \in \mathbb{R}, \\
&\qquad\quad \left\{ \begin{array}{rcl} a'(t) & = & a(t) + \mu e^t \\ b(t) & = & \mu e^t \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Reste à résoudre l'équation différentielle : $\forall t \in \mathbb{R},\ a'(t) = a(t) + \mu e^t$, qu'on notera $(*)$.

1$^{\text{ère}}$ méthode :
En dérivant l'équation, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $a''(t) = a'(t) + \mu e^t$. Or, $\mu e^t = a'(t) - a(t)$, donc $a''(t) = a'(t) + (a'(t) - a(t))$, et donc $a''(t) - 2a'(t) + a(t) = 0$. On est ainsi ramené à une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre, d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 1 = 0$. Or, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Ainsi, l'équation caractéristique a une unique solution réelle qui est 1. Par conséquent, il existe deux constantes γ et δ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = (\delta t + \lambda)e^t$.
Réciproquement, si $a(t) = (\delta t + \lambda)e^t$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $a'(t) = (\delta t + \lambda)e^t + \delta e^t = a(t) + \delta e^t$. Ainsi, une telle fonction a est solution de $(*)$ si et seulement si $\delta = \mu$.
Conclusion : les solutions de $(*)$ sont les fonctions a de la forme $a : t \mapsto (\mu t + \lambda)e^t$ où λ est une constante réelle.

$2^{\text{ème}}$ *méthode :*
On utilise le principe de superposition. L'équation homogène est $a' = a$, dont les solutions sont les fonctions a de la forme $a : t \mapsto \lambda e^t$ où λ est une constante réelle. Reste à trouver une solution particulière.
D'après la forme des solutions de l'équation homogène, on peut la chercher sous la forme $K(t)e^t$ où K est une fonction dérivable à déterminer. Posons $a_0(t) = K(t)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a_0'(t) = K(t)e^t + K'(t)e^t = a_0(t) + K'(t)e^t$. Ainsi, a_0 est solution de $(*)$ si $K'(t) = \mu$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $K : t \mapsto \mu t$ convient, ce qui donne $a_0 : t \mapsto \mu t e^t$ comme solution particulière.
Conclusion : par principe de superposition, les solutions de $(*)$ sont les fonctions a de la forme $a : t \mapsto (\mu t + \lambda)e^t$ où λ est une constante réelle.

On reprend alors la résolution de (Σ) :

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\Sigma) &\iff \text{Il existe } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que, pour tout } t \in \mathbb{R}, \\
&\qquad \left\{\begin{array}{lcl} a(t) &=& (\mu t + \lambda)e^t \\ b(t) &=& \mu e^t \end{array}\right. \\
&\iff \text{Il existe } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que, pour tout } t \in \mathbb{R}, \\
&\qquad X(t) = Q \begin{pmatrix} (\mu t + \lambda)e^t \\ \mu e^t \end{pmatrix} \\
&\iff \text{Il existe } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que, pour tout } t \in \mathbb{R}, \\
&\qquad X(t) = \begin{pmatrix} (2\mu t + 2\lambda - \mu)e^t \\ -(\mu t + \lambda)e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : le couple de fonctions (x, y) est solution de (Σ) si et seulement s'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& (2\mu t + 2\lambda - \mu)e^t \\ y(t) &=& -(\mu t + \lambda)e^t \end{array}\right.$$

Exercice 3

Partie I - Préliminaire

1. (a) La fonction h est continue sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle. De plus, on sait, par croissances comparées, que $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} h(0)$, ce qui montre la continuité de h en 0 (à droite).

   $\boxed{\text{Conclusion : la fonction } h \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+.}$

   (b) On étudie la limite du taux d'accroissement en 0. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \dfrac{h(x)}{x} = \ln(x)$, qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 (à droite).

Conclusion : la fonction h n'est pas dérivable en 0. Sa courbe représentative présente une (demi-)tangente verticale en l'origine.

(c) Par définition de $h(0)$, 0 est déjà un antécédent de 0 par la fonction h. Cherchons maintenant les antécédents strictement positifs. Pour tout $x > 0$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Longleftrightarrow x\ln(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln(x) = 0 \quad \text{car } x > 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Il y a donc un seul antécédent strictement positif de 0, qui est 1.

Conclusion : le réel 0 admet exactement 2 antécédents par la fonction h, qui sont 0 et 1.

2. Remarquons déjà que g est bien définie car, pour tout $x \in [0;1]$, $x \in \mathbb{R}^+$ et $1 - x \in \mathbb{R}^+$. De plus, g est continue sur $[0;1]$ par opérations (composition et combinaison linéaire) sur des fonctions continues.
Ensuite, pour tout $x \in]0;1[$, on a $x > 0$ et $1 - x > 0$, donc $g(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$. Ainsi, g est dérivable sur $]0;1[$ par opérations (composition, produit, et combinaison linéaire) sur des fonctions dérivables, et pour tout $x \in]0;1[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\ln(x) - x \times \frac{1}{x} - (-1)\ln(1-x) - (1-x) \times \frac{-1}{1-x} \\ &= -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1 \\ &= -\ln(x) + \ln(1-x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]0;1[$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Longleftrightarrow -\ln(x) + \ln(1-x) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln(x) < \ln(1-x) \\ &\Longleftrightarrow x < 1 - x \quad \text{par stricte croissance de l'exponentielle} \\ &\Longleftrightarrow 2x < 1 \\ &\Longleftrightarrow x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et de même, $g'(x) < 0 \Longleftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$, et $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Enfin, $g(0) = -h(0) - h(1) = 0$, $g(1) = -h(1) - h(0) = 0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$. D'où le tableau de variations de g :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

3. La variable aléatoire U est à valeurs dans $[\![1;n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(U=k) = \dfrac{1}{n}$. D'où,

$$\begin{aligned} H(U) &= -\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -nh\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -n \times \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\boxed{H(U) = \ln(n)}$.

4. La variable aléatoire U est à valeurs dans $\{0,1\}$ avec $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1)$. D'où $H(X) = -\Big(h(1-p)+h(p)\Big) = g(p)$. Or, d'après les variations de g étudiées à la question 2, g admet un maximum sur $[0;1]$, qui est $\ln(2)$. Par conséquent, $\boxed{H(X) \leqslant \ln(2)}$.

De plus, comme g est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ on a, pour tout $p \in \left[0;\frac{1}{2}\right[$, $g(p) < g\left(\frac{1}{2}\right)$, soit $g(p) < \ln(2)$. De même, par stricte décroissance de g sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ on a $g(p) < \ln(2)$ pour tout $p \in \left]\frac{1}{2};1\right]$. Ainsi, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$, mais $g(p) < \ln(2)$ pour tout $p \in [0;1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$\boxed{\text{Conclusion : on a } H(X) = \ln(2) \text{ si et seulement si } p = \dfrac{1}{2}.}$

5. (a) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\{0,1\}$. Par conséquent, $\boxed{X_1 + X_2 \text{ est à valeurs dans } \{0,1,2\}}$.

(b) Par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\Big([X_2=0],[X_2=1]\Big)$:

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= P\Big([Z=1]\cap[X_2=0]\Big) + P\Big([Z=1]\cap[X_2=1]\Big) \\ &= P\Big([X_1=1]\cap[X_2=0]\Big) + P\Big([X_1=0]\cap[X_2=1]\Big) \end{aligned}$$

Ce qui donne, par indépendance de X_1 et X_2 :

$$P(Z=1) = P(X_1=1)P(X_2=0) + P(X_1=0)P(X_2=1)$$

C'est-à-dire $\boxed{p = p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2}$.

(c) D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}1-2p &= 1-2p_1(1-p_2)-2(1-p_1)p_2 \\ &= 1-(2p_1-2p_1p_2)-(2p_2-2p_1p_2) \\ &= 1-2p_1-2p_2+4p_1p_2\end{aligned}$$

Or, $(1-2p_1)(1-2p_2)=1-2p_1-2p_2+4p_1p_2$. On a donc bien :

$$\boxed{1-2p=(1-2p_1)(1-2p_2)}$$

6. (a) La variable S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p.
Par conséquent, $\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (n,p)}$.

(b) On suit l'indication et montre par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $1-2P(Z_n=1)=(1-2p)^n$ ».
Pour $n=1$, on a

$$\begin{aligned}1-2P(Z_1=1) &= 1-2P(S_1 \text{ est impair}) \\ &= 1-2P(X_1 \text{ est impair}) \quad \text{car } S_1=X_1 \\ &= 1-2P(X_1=1) \\ &= 1-2p \\ &= (1-2p)^1\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(1)$. Maintenant, soit $n\in\mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned}1-2P(Z_{n+1}=1) &= 1-2P(S_{n+1} \text{ est impair}) \\ &= 1-2P(S_n+X_{n+1} \text{ est impair})\end{aligned}$$

Par conséquent, par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\Big([X_{n+1}=0],[X_{n+1}=1]\Big)$:

$$\begin{aligned}1-2P(Z_{n+1}=1) &= 1-2\Big[P\Big([S_n+X_{n+1} \text{ est impair}]\cap[X_{n+1}=0]\Big) \\ &\qquad +P\Big([S_n+X_{n+1} \text{ est impair}]\cap[X_{n+1}=1]\Big)\Big] \\ &= 1-2\Big[P\Big([S_n \text{ est impair}]\cap[X_{n+1}=0]\Big) \\ &\qquad +P\Big([S_n \text{ est pair}]\cap[X_{n+1}=1]\Big)\Big]\end{aligned}$$

Or, X_{n+1} est indépendant de $X_1,\dots,X_n$, donc de S_n. D'où :

$$\begin{aligned}1-2P(Z_{n+1}=1) &= 1-2\Big[P(S_n \text{ est impair})P(X_{n+1}=0) \\ &\qquad +P(S_n \text{ est pair})P(X_{n+1}=0)\Big] \\ &= 1-2\Big[P(Z_n=1)P(X_{n+1}=0)+P(Z_n=0)P(X_{n+1}=0)\Big]\end{aligned}$$

Et donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
1-2P(Z_{n+1}=1) &= 1-2\left[\frac{1-(1-2p)^n}{2}p+\left(1-\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)(1-p)\right] \\
&= 1-2\left[\frac{1-(1-2p)^n}{2}p+\frac{1+(1-2p)^n}{2}(1-p)\right] \\
&= 1-\left[\Big(1-(1-2p)^n\Big)p+\Big(1+(1-2p)^n\Big)(1-p)\right] \\
&= 1-\Big(1-(1-2p)^n\Big)p-\Big(1+(1-2p)^n\Big)(1-p) \\
&= 1-p+(1-2p)^n p-(1-p)-(1-2p)^n(1-p) \\
&= (1-2p)^n p-(1-2p)^n(1-p) \\
&= (1-2p)^n(p-(1-p)) \\
&= (1-2p)^n(1-2p) \\
&= (1-2p)^{n+1}
\end{aligned}$$

Ce qui montre $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1-2P(Z_n=1)=(1-2p)^n$.

(c) La variable aléatoire Z_n suit une loi de Bernoulli, donc, d'après la question 4, on a $\boxed{H(Z_n) \leqslant \ln(2)}$. De plus, toujours d'après la question 4,

$$\begin{aligned}
H(Z_n)=\ln(2) &\iff P(Z_n=1)=\frac{1}{2} \\
&\iff 2P(Z_n=1)=1 \\
&\iff 1-2P(Z_n=1)=0 \\
&\iff (1-2p)^n=0 \quad \text{(question précédente)} \\
&\iff 1-2p=0 \\
&\iff p=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : on a $H(Z_n)=\ln(2)$ si et seulement si $p=\dfrac{1}{2}$.

Partie III - Des variables à densité

7. (a) La variable aléatoire U a pour densité la fonction f définie par :

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $h \circ f$ est nulle en dehors de $[a;b]$ (puisque $h(0)=0$), et pour tout $t \in [a;b]$, $h \circ f(t)=\dfrac{1}{b-a}\ln\left(\dfrac{1}{b-a}\right)=\dfrac{-\ln(b-a)}{b-a}$.

On en déduit que U admet une entropie si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln(b-a)}{b-a}dt$ converge absolument. Or, il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue (constante !) sur un segment.

$\boxed{\text{Conclusion : la variable aléatoire } U \text{ admet une entropie.}}$

(b) On finit le calcul débuté à la question précédente :

$$\begin{aligned} H(U) &= \int_a^b \frac{\ln(b-a)}{b-a} dt \\ &= \frac{\ln(b-a)}{b-a} \int_a^b 1 dt \\ &= \frac{\ln(b-a)}{b-a}(b-a) \end{aligned}$$

Ce qui donne : $\boxed{H(U) = \ln(b-a)}$.

8. (a) Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors on sait d'après le cours que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

$\boxed{\text{Par conséquent, l'intégrale } \int_0^{+\infty} tf(t)dt \text{ est (absolument) convergente et } \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{\lambda}.}$

(b) La variable aléatoire X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $h \circ f$ est nulle sur $]0; +\infty[$ (puisque $h(0) = 0$), et pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} h \circ f(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \ln\left(\lambda e^{-\lambda t}\right) \\ &= \lambda e^{-\lambda t}(\ln(\lambda) - \lambda t) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda) - \lambda e^{-\lambda t} \lambda t \\ &= \ln(\lambda) f(t) - \lambda t f(t) \end{aligned}$$

Ainsi, X admet une entropie si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(-\ln(\lambda) f(t) + \lambda t f(t)\right) dt$ converge absolument. Or, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut 1 (f est une densité de probabilité), et $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$ (question précédente). Par conséquent, $\boxed{X \text{ admet une entropie}}$ et on a :

$$\begin{aligned}
H(X) &= \int_0^{+\infty} \left(-\ln(\lambda) f(t) + \lambda t f(t)\right) dt \\
&= -\ln(\lambda) \int_0^{+\infty} f(t)dt \ + \ \lambda \int_0^{+\infty} t f(t)dt \\
&= -\ln(\lambda) \times 1 \ + \ \lambda \times \frac{1}{\lambda} \\
&= -\ln(\lambda) + 1
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{H(X) = 1 - \ln(\lambda)}$.

9. (a) On sait, d'après le cours que X admet une espérance et une variance et que $\boxed{E(X) = m}$ et $\boxed{V(X) = \sigma^2}$.
Ensuite, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)dt$ est (absolument) convergente puisqu'il s'agit du moment d'ordre 2 de X (qui existe puisque X admet une variance). De plus,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)dt &= E(X^2) \\
&= V(X) + E(X)^2 \quad \text{par la formule de König-Huygens}
\end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)dt = \sigma^2 + m^2}$.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$, d'où

$$\begin{aligned}
h \circ f(t) &= \phi(t) \ln(\phi(t)) \\
&= \phi(t) \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= \phi(t) \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \phi(t) \left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\phi(t) - \frac{t^2 - 2mt + m^2}{2\sigma^2}\phi(t) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\phi(t) - \frac{1}{2\sigma^2} t^2 \phi(t) + \frac{m}{\sigma^2} t\phi(t) - \frac{m^2}{2\sigma^2}\phi(t)
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut 1 (ϕ est une densité de probabilité), $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\phi(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut m (cf question précédente), et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut $\sigma^2 + m^2$ (cf question précédente).

Par conséquent, $\boxed{X \text{ admet une entropie}}$ et on a :

$$\begin{aligned}
H(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2)\phi(t) + \frac{1}{2\sigma^2} t^2 \phi(t) - \frac{m}{\sigma^2} t\phi(t) + \frac{m^2}{2\sigma^2}\phi(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt \ + \ \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt \ - \ \frac{m}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t\phi(t)dt \\
&\qquad + \ \frac{m^2}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt \\
&= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \times 1 \ + \ \frac{1}{2\sigma^2} \times (\sigma^2 + m^2) \ - \ \frac{m}{\sigma^2} \times m \ + \ \frac{m^2}{2\sigma^2} \times 1 \\
&= \frac{\sigma^2 \ln(2\pi\sigma^2) + (\sigma^2 + m^2) - 2m^2 + m^2}{2\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2 \ln(2\pi\sigma^2) + \sigma^2}{2\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2 \left(\ln(2\pi\sigma^2) + 1\right)}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en : $\boxed{H(X) = \dfrac{\ln(2\pi\sigma^2) + 1}{2}}$.